1. 数值求解如下问题：

与某动力学系统对应的能量为

$$H=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{40}x^4$$

(1)给定$r(0)=0.1$，$r(0.02)=0.15$，**以** 0.02 **为间隔，用** Verlet **算法求出** $r(t)$，$t\leqslant 1$，**并画图。**

(2)给定$r(0)=0.1$，$v(0)=0.4$，**以** 0.02 **为间隔，用速度** Verlet **法求出** $r(t)$，$t\leqslant 1$，**并画图。**

结合动力学系统对应的能量表达式获得力的表达式

$$F=\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-x-\frac{x^3}{10}$$

(1) Verlet 算法：$r(t+h)=2r(t)-r(t-h)+h^2F(r,t)$，结合给定的$r(0)=0.1$，$r(0.02)=0.15$，以$h=0.02$进行迭代，并存储每次迭代过程中得到的$r$，迭代 49 次便可获得$t\leqslant 1$，对应的位置的变化，并画图。

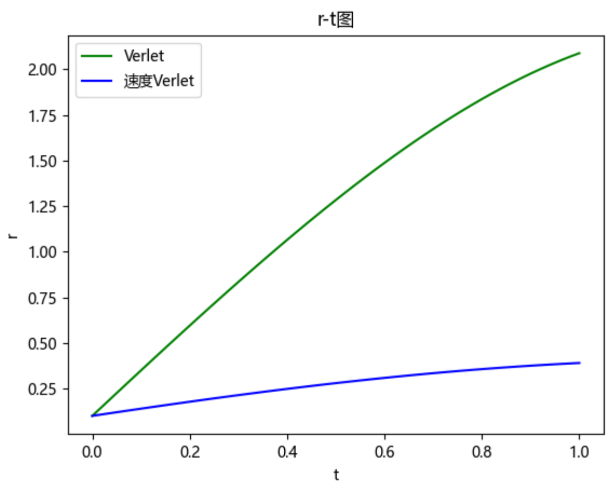
(2) 速度 Verlet 算法：
$$\begin{aligned} r(t+h)&=r(t)+v(t)h+h^2F(r,t)/2 \quad (1)\\ v(t+h)&=v(t)+h/2\left[F(r,t)+F(r(t+h),\ t+h)\right] \quad (2) \end{aligned},$$

结合给定的$r(0)=0.1$，$v(0)=0.4$，以$h=0.02$进行迭代，先结合表达式(1)求出下一时刻的位置$r(t+h)$并存储，再结合当前位置$r(t)$以及下一时刻的位置$r(t+h)$求出对应时刻的受力$F(t)$和$F(t+h)$，结合表达式(2)求出下一时刻的速度$v(t+h)$并存储，迭代 50 次便可获得$t\leqslant 1$，对应的位置的变化，并画图。

Python 代码：

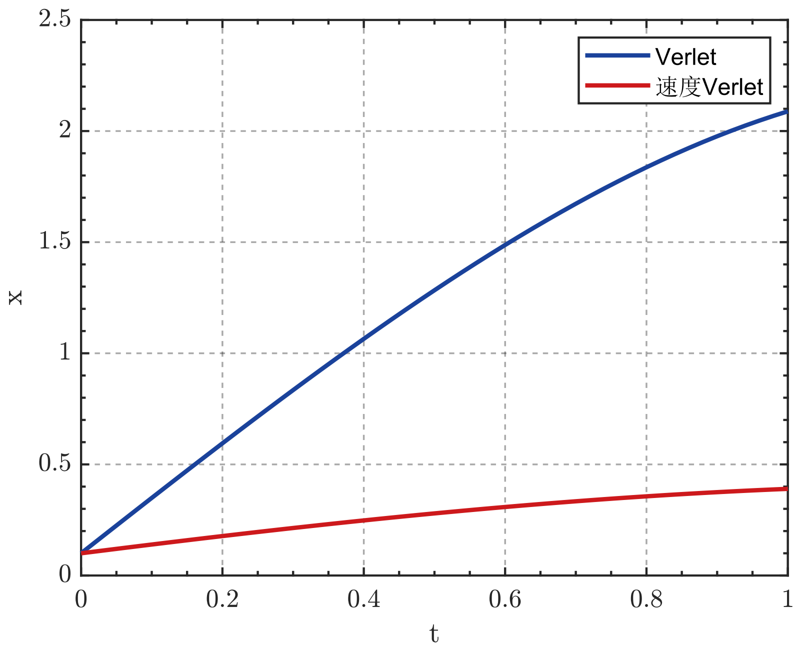
```
import numpy as np
import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt

# 设置中文字体
matplotlib.rcParams['font.sans-serif'] = ['Microsoft YaHei']  # 设置字体为黑体（SimHei）
matplotlib.rcParams['axes.unicode_minus'] = False    # 解决负号显示问题

h = 0.02
r = [0.1, 0.15]

v1 = [0.4]
```

```
r1 = [0.1]

def Ffun(x):
    f = - x - 0.1 * x**3
    return f

for i in range(1,50):
    ri = r[i]
    ri_0 = r[i-1]
    ri_1 = 2 * ri - ri_0 + h**2 * Ffun(ri)
    r.append(ri_1)

for i in range(50):
    r1i = r1[i]
    v1i = v1[i]
    Ft = Ffun(r1i)
    r1i_1 = r1i + v1i * h + h**2 * Ft / 2
    r1.append(r1i_1)
    v1i_1 = v1i + h / 2 * (Ft + Ffun(r1i_1))
    v1.append(v1i_1)

t = np.arange(0, 1.02, 0.02)

plt.figure()
plt.plot(t, r, 'g-', label='Verlet')   # 绿色线条
plt.plot(t, r1, 'b-', label='速度 Verlet')   # 蓝色线条
plt.title('r-t 图')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('r')
plt.legend()
plt.show()
```



Matlab 代码：

```
%% Verlet 算法
clear;
h = 0.02;
t = 0 : h : 1;
steps = size(t, 2);
x1 = zeros(steps, 1);
x1(1) = 0.1;
x1(2) = 0.15;
f = @(x) - (x + 1 / 10 * x^3);
for i = 3:steps
    x1(i) = 2 * x1(i-1) - x1(i-2) + h^2 * f(x1(i-1));
end

%% 速度 Verlet 算法
x2 = zeros(steps, 1);
v = zeros(steps, 1);
x2(1) = 0.1;
v(1) = 0.4;
for i = 2 : steps
    x2(i) = x2(i-1) + v(i-1) * h + 1/2 * h^2 * f(x2(i-1));
    v(i) = v(i-1) + 1/2 * (f(x2(i)) + f(x2(i-1))) * h;
end

%% 绘图
plot(t, x1, LineWidth=2, Color='#1A429B')
hold on;
plot(t, x2, LineWidth=2, Color='#CD191C');
legend('Verlet', '速度 Verlet')
hold on;
xlabel('t', Interpreter='latex');
ylabel('x', Interpreter='latex');
p = gca;
p.LineWidth = 1;
p.XMinorTick = 1;
p.YMinorTick = 1;
p.XGrid = 1;
p.YGrid = 1;
p.GridLineWidth = 0.8;
p.GridLineStyle = '--';
p.GridAlpha = 0.4;
p.TickLabelInterpreter = 'latex';
p.FontSize = 12;
```



Verlet
速度Verlet
2.5
2
1.5
1
0.5
0
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t