1. Laplace 方程及其边界条件为

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(x,y)=0 \\ \varphi(x,0)=\varphi(x,1)=0,\ \varphi(0,y)=\varphi(1,y)=1 \end{cases}$$

用随机游走的蒙特卡罗方法数值求解正方形场域($0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$)的势函数。给出具体算法步骤。

算法步骤：

（1） 网格分划，将此正方形区域进行横纵等距分割，相邻格点距离为 h，将区域内部的网格点编号，记编号为 i，其范围为 1 到 N，N 为总内部格点数。初始化游走路径数目N_w。

（2） 离散化偏导数，泊松方程加上边界条件可以写成矩阵形式$\varphi=P\varphi+A$。对于矩阵 P：如果 i 不在边界上，则$p_{ij}=1/4$或 0：前者对应的 j 是 i 的相邻点；后者对应其它情况。如果 i 在边界上，则$p_{ij}=0$。

（3） 考察第 i 个格点，将其作为出发点。从 i 格点开始随机游走，每次有 1/4 的概率走至相邻的格点中的一个（可用塔式抽样决定是哪个格点），直到边界处停止，完成一个路径。在每个路径点处计算 A 的值，在$x=0$以及$x=1$的边界取值为 1，其他情况均取为 0。将所有值加和构成对φ_R的一个无偏估计。

（4） 重复游走过程，直到获得N_w条游走路径，将所有无偏估计加和并除以N_w，此即为φ_R，也即待定函数在第 i 个格点的值。

（5） 重复第 3,4 步，直到遍历所有格点。