1. 请利用软件里的随机数生成代码，设定 N=3，按照第 16 页的算法思路执行三步，并手动计算出π的值。

N=1: 给出两个随机数$x_1 = 0.26$; $y_1 = 0.79$;

对应$x_1^2 + y_1^2 = 0.6971 < 1$，$Nh = 1$;

N=2: 给出两个随机数$x_2 = -0.41$; $y_2 = 0.53$;

对应$x_1^2 + y_1^2 = 0.4490 < 1$，$Nh = 2$;

N=3: 给出两个随机数$x_3 = 0.82$; $y_3 = 0.37$;

对应$x_1^2 + y_1^2 = 0.8093 < 1$，$Nh = 3$;

输出$\pi = 4 \cdot \frac{Nh}{N} = 4$。

评分标准（10 分）：写出三组随机数并判断大小，最后计算π得 10 分，未计算最终结果得 7 分。

2. 请将 16 页的算法写成代码，并分别设定 N=100，N=1000，N=10000 获得π的值。

Python 代码：

```
import random

Nh = 0
N = 10000
for i in range(N):
    x = 2*random.random() - 1
    y = 2*random.random() - 1
    l = x**2 + y**2
    if l < 1:
        Nh += 1

pi = 4 * Nh /N
print(pi)
```

MATLAB 代码：

```
function Pi = Pi(N)
    Nh = 0;
    for i = 1 : N
```

```
        x = 2 * rand - 1;
        y = 2 * rand - 1;
        if x^2 + y^2 < 1 + 1e-2
            Nh = Nh + 1;
        end
    end
    Pi = 4 * Nh / N;
End

clear;
Pi_100 = Pi(100);
Pi_1000 = Pi(1000);
Pi_10000 = Pi(10000);
```

评分标准（10 分）：代码可以运行且能正确给出结果得 10 分，未能成功运行视代码完整度给分。

3.（附加）证明课件中给出的估算 e 的算法是正确的，也即证明此方法定义的 n 的期望值确实是 e。

这里提供两种方法

方法一：

定义P_n为n个在$(0,1)$上均匀分布的数的和S_n小于 1 的概率，则

$$P(S_n>1)=P_{n-1}-P_n$$

现在需要求解P_n，由P_n的定义知

$$P_n=\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n$$

做换元$x_i\to y_i=\sum_{n=1}^{i}x_n$，该换元的雅可比行列式为

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\0&0&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1,$$

P_n变为

$$P_n=\int_0^1\mathrm{d}y_1\int_{x_1}^1\mathrm{d}y_2\cdots\int_{x_1+\cdots+x_n}^1\mathrm{d}y_n$$

此时有$0<y_1<y_2<\cdots<y_n<1$，根据指标的对称性，任意更换它们的指标将不会改变P_n，比如$0<y_2<y_1<\cdots<y_n<1$。这样的排序共有$n!$种，这些排序遍历每一个变量y_i在$(0,1)$上的所有区域，所以有

$$n!P_n=\int_0^1\mathrm{d}y_1\int_0^1\mathrm{d}y_2\cdots\int_0^1\mathrm{d}y_n=1$$

解得$P_n=\frac{1}{n!}$，进而有$P(S_n>1)=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{n-1}{n!}$，则$n$的期望值为

$$\langle n\rangle=1\cdot 0+\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{n-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=e$$

方法二：

利用 Irwin-Hall 分布：n个在$(0,1)$上均匀分布的随机数的和为x的概率密度函数为

$$f(x;n)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)_+^{n-1}$$

其中

$$(x-k)_+=\begin{cases}x-k, & x\geq k\\ 0, & x<k\end{cases}$$

则可以求n个数之和小于 $1(x<1)$的概率为

$$P_n=\int_0^1\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=\frac{1}{n!}$$

剩余步骤与方法一相同。

评分标准（10 分）：证明详细完整得 10 分；未给出计算P_n的具体过程但给出最终证明得 7 分，视情况加减分。