1. 请将点在圆内和圆外的算法中的角度计算精度提高到五阶，给出具体角度计算方式，并写出新的算法步骤。

（1） 给出需要检验的点的坐标(x', y')；

（2） 给出圆上点的坐标，$\phi_i = 2\pi \dfrac{i}{N}$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$，则$x_i=\cos\phi_i$; $y_i=\sin\phi_i$；

（3） 给出$\vec{r}_i$和$\vec{r}_{i+1}$；

（4） 利用 $\vec{r}_i$ 和 $\vec{r}_{i+1}$ 计算得到 $\sin\Delta\theta_i = \dfrac{\vec{r}_i\times\vec{r}_{i+1}}{|\vec{r}_i|\cdot|\vec{r}_{i+1}|} = \lambda$，将 $\Delta\theta_i = \lambda + \dfrac{\lambda^3}{6} + \delta\lambda$ 代入 $\delta\lambda = \Delta\theta_i - \dfrac{(\Delta\theta_i)^3}{6} + \dfrac{(\Delta\theta_i)^5}{5!}$，求得$\delta\lambda = \dfrac{3\lambda^5}{40}$(或者利用$\arcsin\lambda = \lambda + \dfrac{\lambda^3}{6} + \dfrac{3\lambda^5}{40} + \cdots$展开到五阶)；

（5） 利用$\lambda = \sin\Delta\theta_i$, $\Delta\theta_i = \lambda + \dfrac{\lambda^3}{6} + \dfrac{3\lambda^5}{40}$求解$\Delta\theta_i$；

（6） 计算绕数，$n = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{0}^{N-1}\Delta\theta_i$；

（7） 判断内外：$n=0$ 点在圆外，$n=\pm 1$ 点在圆内。

评分标准（10 分）：算法步骤完整，五阶项正确则 10 分；若步骤完整，五阶项计算错误则 7 分，若过程详细，逻辑清晰可得 8-9 分，若算法步骤不完整，过程不清晰则适当减分。

2. （附加）请利用电磁学中的高斯定理，给出判断一个点在单位球内、球外、球上的算法，写出算法步骤，并简述原理。(鼓励大家自己写代码验算算法是否正确)（又附：此问题源自电子的能带结构。在三维布里渊区里确定好电子等能面与极值点之后如何判定等能面所包裹是哪个能量极值点。

（1） 给出需要检验的点的坐标$\boldsymbol{r} = (x_0, y_0, z_0)$；

（2） 给出单位球面上点的坐标$\boldsymbol{r}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$，其中坐标分量为$x_{i,j} = \sin\theta_i\cos\phi_j$，$y_{i,j} = \sin\theta_i\sin\phi_j$，$z_{i,j} = \cos\theta_i$。$\theta_i = \pi\dfrac{i}{N}$; $\phi_j = 2\pi\dfrac{j}{N}$ $(i,j=0,1,\cdots,N-1)$；

（3） 应用高斯定理，$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，取面元法向量为包围该面元的 4 点的法向量平均，由于(i,j)处法向量就是$\boldsymbol{r}_{i,j}$，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_{i,j} = \frac{\boldsymbol{r}_{i,j}+\boldsymbol{r}_{i,j+1}+\boldsymbol{r}_{i+1,j}+\boldsymbol{r}_{i+1,j+1}}{4}R^2\sin\theta_i\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\phi_j = \bar{\boldsymbol{r}}_{i,j}R^2\sin\theta_i\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\phi_j;$$

（4） 定义$\boldsymbol{r}=(x_0, y_0, z_0)$处点电荷在面元处产生的场强$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}_{i,j}}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}_{i,j}|^3}$

（5） 计算求和$I=\sum_{i,j}^{N-1}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}_{i,j})\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_{i,j}}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}_{i,j}|^3}R^2\sin\theta_i\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\phi_j$。求和过程中可同时判断点在球上的情况。当参考点在球附近或球上时，可以利用被积函数即参考点与面元之间的立体角这一性质判断点的具体位置。计算立体角元$\mathrm{d}\Omega=\dfrac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{i,j})\cdot\bar{\boldsymbol{r}}_{i,j}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{i,j}|^3}R^2\sin\theta_i\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\phi_j$，当$\mathrm{d}\Omega$很大时，可增加撒点的密度，比如从$N$增加到$2N$，再次计算立体角元，若立体角元仍然很大，则点在球上；若立体角减小，则此时点在球附近，按照此时的撒点密度重新求和。

（6） 如果求和结果 $I=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$，则点在球内；$I=0$，则点在球外；此外，另一种判断球面上的方式：如果参考点恰好在球上，此时球包围的通量为整个点电荷通量的一半，(5)中的积分结果为$\dfrac{q}{2\varepsilon_0}$，可利用这一点判断点是否在球上。

评分标准（10 分）：算法步骤完整，判定条件正确则 10 分；若步骤完整，判定条件中有一处错误则 7 分；在此基础上根据算法详细程度、判定条件错误程度加减分。