Delauny Triangulation.

FEM 的特点：
可用于复杂边界 → 方法：三角化，
若边界太规则则可选差分法.

三角剖分.(Triangulation)

(主要考虑 2D)

平面点集 $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$，三角形集合 $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$

a). 三角形顶点集合 = P

b) 任意三角形的边不相交(可重合)

c) 三角形的合集 = P 的凸包.

(凸包：大概：点集最外层的点构成的多边形
精确：最小的凸多边形，使点集的点在其内或边上)

最优剖分：每个三角形不狭长，最好趋于等边.

a). 最大化最小角：所有三角形中的最小内角.

b) 纵横比：三角形最短与最长边的比例
(越大越好)

c). 半径比：内接圆半径的2倍 / 外接圆半径.
(尽量大)

Delauny Triangulation:

即三角剖分中任一三角形的外接圆内部无点集中点(顶点).

性质:

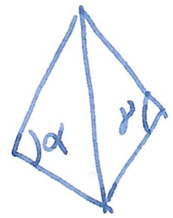
a) 最大化最小角.

b) 最小化外接圆

c) 若无四点共圆，则剖分唯一.

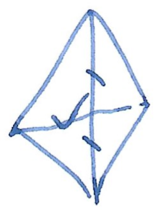
获得方法:

一、1) 翻转边:



若 $\alpha+\gamma\leq\pi$，则满足;

否则 →



2) 算法: i 初始任一三角剖分

ii) 对于每条边找到共享的二个三角形

iii) 判断此四边形是否满足

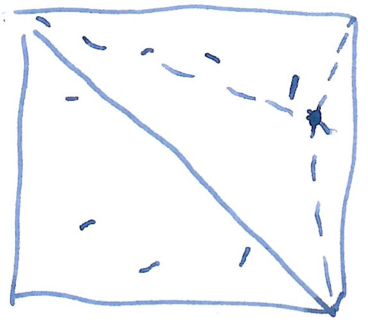
iv) 不满足的边翻边.

$O(n^2)$

二维可用，高维不一定收敛.

二、增量法：

a) 找出包围盒.



b) 连对角线 构成初始三角剖分

c) 增加1个顶点...

找出其在哪个三角形内；将其与此三角形顶点相连.

从而替换成三个三角形.

d). 检查新三角形是否符合要求；若不符合，采用翻转边算法

e) 持续加点，直到所有点被加入.

判断点在圆内：

D在$\triangle ABC$的外接圆内：

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_x^2+A_y^2 & 1 \\ B_x & B_y & B_x^2+B_y^2 & 1 \\ C_x & C_y & C_x^2+C_y^2 & 1 \\ D_x & D_y & D_x^2+D_y^2 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

证：$(x,y) \longrightarrow$ 抛物面 $z=x^2+y^2$，(x,y,z).

A,B,C,D 共圆 $\Longleftrightarrow$ $P(A), P(B), P(C), P(D)$ 共面.

若 A,B,C,D 共圆. 则. $(x_A-p)^2+(y_A-q)^2=r^2$

$$\Longrightarrow -2p\,x_A - 2q\cdot y_A + 1\cdot(x_A^2+y_A^2) + (p^2+q^2-r^2)\cdot 1 = 0$$

对B、C、D亦成立.

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & x_A^2+y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2+y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2+y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2+y_D^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2p \\ -2q \\ 1 \\ p^2+q^2-r^2 \end{pmatrix} = 0$$

P.4.

有非平凡解 $\Rightarrow$

$\det = 0$.

抛物线面上凸，则

$\det > 0 \Leftrightarrow$ 在圆内.

A, B, C 逆时针排序，

此时 $\det \left|\quad\right|$ 中包含 $D_x^2+D_y^2$ 的项为

$-(D_x^2+D_y^2)\cdot\alpha$，$\alpha = \det \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix} = (\vec{CA}\times\vec{CB})\cdot\hat{z} > 0$

则 若 $D_x^2+D_y^2 <$ 临界值 $\Leftrightarrow \det \left|\quad\right| >$ 临界值 $=0$

$\Updownarrow$ $\Rightarrow$

点在圆内（上凸）.